Enigme P2T "Un problème de carré" par Promath (2015-07-28). Solution par masab.

Problème

On cherche les couples (n, a) avec $n \geq 1$ entier et $a > 1$ un entier de n chiffres au plus (en base 10) tel que

$$a^2 = a + 10^n b$$

où b est un entier naturel.

1ère méthode

Cette condition s'écrit aussi $a\,(a-1) = 10^n b$, c-à-d

$$10^n \text{ divise } a\,(a-1)$$

L'entier a est à n chiffres au plus, donc $1 < a < 10^n$. Par suite 10^n ne divise ni a, ni $a-1$. Comme a et $a-1$ sont des entiers premiers entre eux, on est forcément dans l'un des deux cas suivants (pour que a soit solution).

1er cas : 2^n divise a et 5^n divise $a-1$.
Dans ce cas on notera $a_1 = a$. On a donc

$$\begin{cases} a_1 = 2^n \alpha_1 & \text{où } \alpha_1 \text{ est un entier} \\ a_1 - 1 = 5^n \beta_1 & \text{où } \beta_1 \text{ est un entier} \end{cases}$$

En retranchant la seconde relation de la première, on obtient donc

$$2^n \alpha_1 - 5^n \beta_1 = 1$$

qui est une relation de Bézout entre 2^n et 5^n.
2^n et 5^n sont premiers entre eux, donc on sait qu'il existe des entiers u, v tels que

$$2^n u - 5^n v = 1\,.$$

De plus les seules relations de Bézout entre 2^n et 5^n sont de la forme

$$2^n(u + 5^n r) - 5^n(v + 2^n r) = 1$$

où r est un entier quelconque.
Comme $a_1 < 10^n$, on a $1 \leq \alpha_1 < 5^n$ et $1 \leq \beta_1 < 2^n$. Il résulte donc de ce qui précède que α_1 et β_1 existent et sont uniques ; par suite il en est de même de a_1.

2ème cas : 5^n divise a et 2^n divise $a-1$.
Dans ce cas on notera $a_2 = a$. On a donc

$$\begin{cases} a_2 = 5^n \alpha_2 & \text{où } \alpha_2 \text{ est un entier} \\ a_2 - 1 = 2^n \beta_2 & \text{où } \beta_2 \text{ est un entier} \end{cases}$$

En retranchant la seconde relation de la première, on obtient donc

$$2^n(-\beta_2) - 5^n(-\alpha_2) = 1$$

qui est encore une relation de Bezout entre 2^n et 5^n.
Comme $a_2 < 10^n$, on a $1 \leq \alpha_2 < 2^n$ et $1 \leq \beta_2 < 5^n$. Il résulte donc de ce qui précède que α_2 et β_2 existent et sont uniques ; par suite il en est de même de a_2.
De plus

$$\begin{cases} -\beta_2 = \alpha_1 - 5^n \\ -\alpha_2 = \beta_1 - 2^n \end{cases}$$

On a donc

$$a_2 = 5^n \alpha_2 = 5^n\,(-\beta_1 + 2^n) = -5^n\,\beta_1 + 10^n = -(a_1 - 1) + 10^n$$

Par conséquent $a_1 + a_2 = 1 + 10^n$.

Finalement on a prouvé que pour tout entier $n \geq 1$ notre problème avait exactement 2 solutions a_1 et a_2. On peut calculer ces solutions en utilisant l'algorithme d'Euclide de 2^n et 5^n (pour un n fixé). De plus on a la relation

$$\boxed{a_1 + a_2 = 1 + 10^n}$$

2ème méthode

Pour $n = 1$ il y a exactement 2 solutions données par $a = 5$ et $a = 6$.

1ère étape

Soit une solution (n, a) à notre problème avec $n \geq 2$. On a donc $a^2 = a + 10^n b$ où b est un entier. En notant d le chiffre le plus à gauche de a écrit avec n chiffres (commençant éventuellement par 0), on peut écrire

$$a = a' + 10^{n-1} d$$

où a' est un entier qui s'écrit avec au plus $n - 1$ chiffres. On a donc

$$(a' + 10^{n-1} d)^2 = a' + 10^{n-1} d + 10^n b$$

donc 10^{n-1} divise $a'^2 - a'$. Par suite $(n - 1, a')$ est aussi une solution à notre problème.

Finalement on a prouvé que si l'on a une solution (n, a) à notre problème avec $n \geq 2$ et si l'on supprime le chiffre le plus à gauche de a écrit avec n chiffres (commençant éventuellement par 0), alors on obtient une solution $(n - 1, a')$ à notre problème.

2ème étape

Soit une solution (n, a) à notre problème avec $n \geq 1$. On a donc $a^2 = a + 10^n b$ où b est un entier.

On écrit a avec n chiffres (commençant éventuellement par 0). Prouvons qu'il existe un chiffre d et un seul tel que si l'on rajoute ce chiffre d à gauche de l'écriture de a, on obtient un entier a' tel que $(n + 1, a')$ soit solution à notre problème.

On cherche les entiers d, $0 \leq d \leq 9$, tels que si l'on pose

$$a' = a + 10^n d$$

alors $(n + 1, a')$ soit solution à notre problème. Cela équivaut à dire que 10^{n+1} divise $a'2 - a'$. Or

$$a'^2 - a' = (a + 10^n d)^2 - a - 10^n d = (a^2 - a) + 2 \cdot 10^n ad + 10^{2n} d^2 - 10^n d$$

$$a'^2 - a' = 10^n b + 2 \cdot 10^n ad + 10^{2n} d^2 - 10^n d = 10^n \left(b + 2ad + 10^n d^2 - d\right)$$

La condition 10^{n+1} divise $a'^2 - a'$ est donc équivalente à dire que 10 divise $b + d(2a - 1)$.

Or $(2a-1)^2 - 1 = 4(a^2 - a)$ est divisible par 10^n. Donc la condition précédente équivaut à dire que $b(2a-1)+d$ est divisible par 10, d'où $d = -b(2a - 1) \mod 10$.

On en déduit que le chiffre d existe et est unique.

Finalement soit une solution (n, a) à notre problème avec $n \geq 1$. On a prouvé qu'il existe un chiffre d et un seul tel que si l'on rajoute ce chiffre d à gauche de a écrit avec n chiffres (commençant éventuellement par 0)., on obtient un entier a' tel que $(n + 1, a')$ soit solution à notre problème. Pour calculer d, on calcule d'abord $b = \dfrac{a^2 - a}{10^n}$; alors d est donné par $d = -b(2a - 1) \mod 10$.

Conclusion des 2 étapes.

Comme pour $n = 1$ le problème étudié admet exactement 2 solutions, $a = 5$ et $a = 6$, il résulte des 2 étapes précédentes que pour tout $n \geq 1$ le problème admet aussi exactement 2 solutions.

Exemples

A partir des solutions $(1, 5)$ et $(1, 6)$, on obtient par le calcul précédent pour $n = 50$ les 2 solutions :

57423423230896109004106619977392256259918212890625

42576576769103890995893380022607743740081787109376

Ces solutions induisent comme indiqué à la 1ère étape toutes les solutions pour $n \leq 50$.